

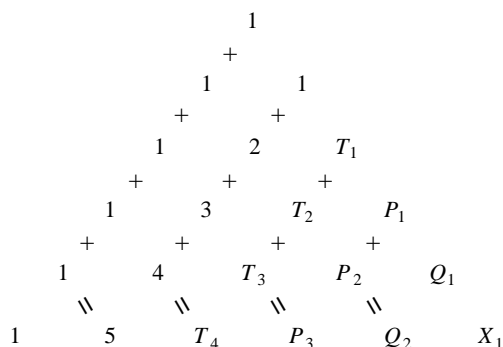
Tetraedertal og Pascals trekant

Af Sven Erik Morsing, Det kristne Gymnasium.

Bevis.

Vi benytter induktion.

Det behøver ikke være så indviklet at bestemme tetraedertal, som artiklerne i de foregående numre af dette blad kunne give indtryk af. Redningen er *Pascals trekant*.



Figur 1: Pascals trekant i særlig notation

Benævner vi det n -te trekantstal T_n og det n -te tetraeder-/pyramidetotal P_n , kan pyramidetallene defineres rekursivt ved

$$P_1 = 1$$

$$P_n = T_n + P_{n-1}, \quad \text{for } n = 2, 3, 4, \dots$$

Den sidste svarer til grundegenskaben for binomialkoefficienterne $K(n, r)$ i Pascals trekant,

$$K(n, 3) = K(n-1, 2) + K(n-1, 3)$$

idet trekantallene kan findes i den 3. diagonal med $r = 2$ og pyramidetallene i den 4. diagonal med $r = 3$. Se figur 1.

Vi ledes derfor til følgende

Sætning

Det n -te pyramidetotal $n \in \mathbb{N}$ er givet ved

$$P_n = K(n+2, 3)$$

Basisledet:

For $n = 1$ fås det første pyramidetotal 1,

$$P_1 = K(3, 3) = 1$$

Induktionsledet:

For $k > 1$ gælder, idet pyramidenummer $k+1$ kan reduceres til pyramidenummer k ved afskæring af det nederste lag, som repræsenterer et antal svarende til trekantallet T_{k+1} , jf. den rekursive definition:

$$P_k = K(k+2, 3) \Rightarrow$$

$$P_{k+1} = P_k + T_{k+1}$$

$$= K(k+2, 3) + K(k+2, 2)$$

$$= K(k+3, 3)$$

som dermed sikrer sætningens gyldighed, dog under forudsætning af, at trekantallene er givet ved

$$T_n = K(n+1, 2)$$

Men dette indses let analogt og overlades til læseren.

Hypertetraedertal

Vi kan nu generalisere til trekantall i højere dimensioner end 3. Den rekursive definition af trekantall i dimension d ,

$$T_1^d = 1$$

$$T_n^d = T_n^{d-1} + T_{n-1}^d, \quad \text{for } n = 2, 3, 4, \dots$$

hvor $T_n^1 = n$ er de naturlige tal, og T_n^2 er de sædvanlige trekantall.

Det må så formodes at gælde generelt, at

$$T_n^d = K(n+d-1, d)$$

Ser man på Pascals trekant, finder man T_n^d i den $d+1$ -ste diagonal. \diamond