Tetraedertal og Pascals trekant

Af Sven Erik Morsing, Det kristne Gymnasium.

Det behøver ikke være så indviklet at bestemme tetraedertal, som artiklerne i de foregående numre af dette blad kunne give indtryk af. Redningen er *Pascals trekant.*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & + & & & & & & \\
 & & & 1 & & & 1 & & & & \\
 & & + & & & + & & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & T_1 & & & & \\
 & + & & + & & + & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & T_2 & & P_1 & & & \\
 + & & + & & + & & + & & & & \\
1 & & 4 & & T_3 & & P_2 & & Q_1 & & \\
\| & & \| & & \| & & \| & & & & \\
1 \quad 5 & & T_4 & & P_3 & & Q_2 & & X_1 & &
\end{array}
$$

Figur 1: Pascals trekant i særlig notation

Benævner vi det n-te trekanttal T_n og det n-te tetraeder-/pyramidetal P_n, kan pyramidetallene defineres rekursivt ved

$$
\begin{aligned}
&P_1 = 1 \\
&P_n = T_n + P_{n-1}, \qquad \text{for } n = 2,3,4,\ldots
\end{aligned}
$$

Den sidste svarer til grundegenskaben for binomialkoefficienterne $K(n, r)$ i Pascals trekant,

$$K(n,\ 3) \ = \ K(n-1,\ 2) \ + \ K(n-1,\ 3)$$

idet trekanttallene kan findes i den 3. diagonal med $r = 2$ og pyramidetallene i den 4. diagonal med $r = 3$. Se figur 1.

Vi ledes derfor til følgende

Sætning
Det n-te pyramidetal $n \in N$ er givet ved

$$P_n = K(n+2,\ 3)$$

Bevis.
Vi benytter induktion.

Basisleddet:
For $n = 1$ fås det første pyramidetal 1,

$$P_1 = K(3,3) = 1$$

Induktionsleddet:
For $k > 1$ gælder, idet pyramidenummer k+1 kan reduceres til pyramidenummer k ved afskæring af det nederste lag, som repræsenterer et antal svarende til trekanttallet T_{k+1}, jf. den rekursive definition:

$$
\begin{aligned}
P_k &= K(k+2,3) \Rightarrow \\
P_{k+1} &= P_k + T_{k+1} \\
&= K(k+2,3) + K(k+2,2) \\
&= K(k+3,3)
\end{aligned}
$$

som dermed sikrer sætningens gyldighed, dog under forudsætning af, at trekanttallene er givet ved

$$T_n = K(n+1,2)$$

Men dette indses let analogt og overlades til læseren.

Hypertetraedertal

Vi kan nu generalisere til trekanttal i højere dimensioner end 3. Den rekursive definition af trekanttal i dimension d,

$$
\begin{aligned}
&T_1^d = 1 \\
&T_n^d = T_n^{d-1} + T_{n-1}^d, \qquad \text{for } n = 2,3,4,\ldots
\end{aligned}
$$

hvor $T_n^1 = n$ er de naturlige tal, og T_n^2 er de sædvanlige trekanttal.

Det må så formodes at gælde generelt, at

$$T_n^d = K(n+d-1,d)$$

Ser man på Pascals trekant, finder man T_n^d i den d + 1-ste diagonal. ◊