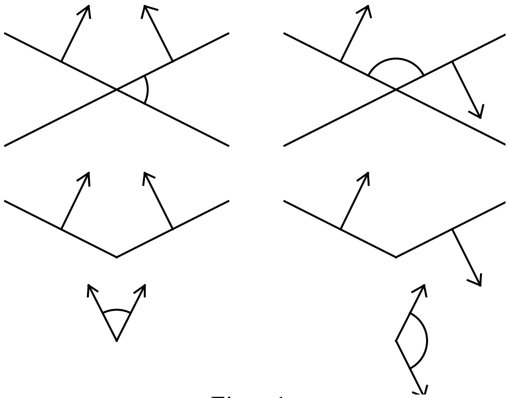
Toplansvinkler i praksis

Af Mogens Thorborg, Sankt Annæ Gymnasium.

To skærende planer er enten ortogonale eller danner to spidse og to stumpe toplansvinkler. I matematiske opgaver kan den ene af disse vinkler ofte være lige så god som den anden, idet vinklerne blot er hinandens supplementvinkler. Bestemmelsen af toplansvinklerne sker traditionelt ved at bestemme vinklen mellem to normalvektorer til de to planer. På figur 1 er illustreret, hvorledes man vil få henholdsvis den spidse eller den stumpe vinkel, afhængigt af hvordan normalvektorerne vælges.



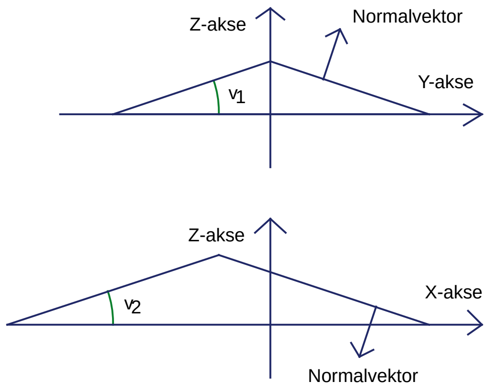
Figur 1.

Hvis det drejer sig om to tagflader, figur 2, der mødes, er det jo ikke ligegyldigt, om vi finder den spidse eller den stumpe vinkel. Hvis vi i situationen illustreret på figur 1 er interesseret i at finde den stumpe vinkel, så skal de to normalvektorer, som det fremgår, pege hver sin vej i forhold til vinkelrummet.

Figur 2.

For at bestemme vinklen mellem de to tagflader på huset, indlægger vi et 3-D koordinatsystem, således at tagrenderne ligger i X-Y-planen, X-aksen er parallel med den lave tagryg og Y-aksen er parallel med den høje tagryg. Z-aksen går gennem det punkt, hvor den lave tagryg møder tagfladen på det høje tag.

Det lave tag projiceres ind på Y-Z-planen, og det høje tag projiceres ind på X-Z-planen, og disse projektioner ser ud som på figur 3. Vi bemærker at den første normalvektor peger ind mod vinkelrummet i toplansvinklen, mens den anden peger væk fra vinkelrummet.



Figur 3.

De indtegnede normalvektorer er ensrettede med disse to enhedsvektorer:

$$\vec{e}_1 = (0, \sin(v_1), \cos(v_1))$$
$$\vec{e}_2 = (-\sin(v_2), 0, -\cos(v_2))$$

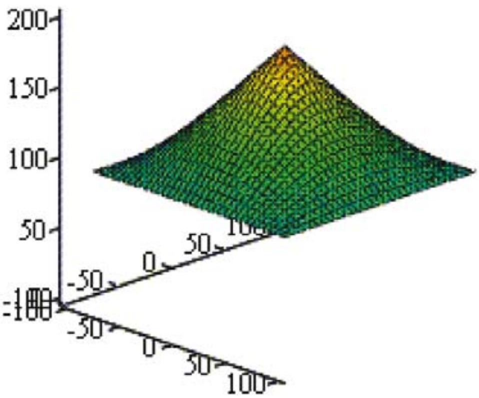
Idet den søgte toplansvinkel kaldes w, får vi hermed:

$$\cos(w) = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = -\cos(v_1) \cdot \cos(v_2)$$

eller

$$w = Arc\cos(-\cos(v_1) \cdot \cos(v_2))$$

Den flade, som denne funktion af to variable fremstiller, er vist på figur 4, idet begge vinkler dog i praksis ligger mellem 0 og 90 grader, og ikke som på figuren fra -90 til 90. Det fremgår desuden af figuren, at toplansvinklen er stump.



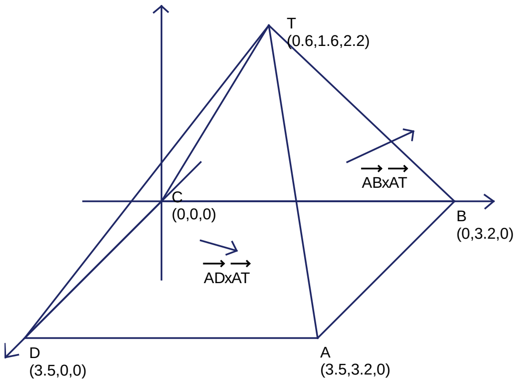
Figur 4.

Ved bestemmelse af toplansvinklen langs en af kanterne i en pyramide, figur 5 og 6, er det også vigtigt at sikre sig, at det bliver den rigtige af de to supplementvinkler, vi når frem til.

Figur 5.

Her skal den ene normalvektor således pege ind i pyramiden, og den anden skal pege ud af pyramiden. Dette opnås ved at lade den kant, hvis toplansvinkel, vi ønsker at bestemme, være i samme position i krydsproduktet ved beregningen af normalvektorerne. På figuren vil således begge nedenstående sæt af vektorer være højresystemer:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AT})$$
$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AT})$$



Figur 6.

Den rigtige toplansvinkel *w* fås således automatisk ved følgende formel:

$$\cos(w) = \frac{(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AT}) \cdot (\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AT})}{\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AT}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AT}\right\|}$$

Denne formel ser muligvis umiddelbart lidt skræmmende ud, men med tallene fra figur 6 vil følgende indtastninger i TI-Interactive klare sagen:

> *A*:=[3.5,3.2,0]
> *B*:=[0,3.2,0]
> *D*:=[3.5,0,0]
> *T*:=[0.6,1.6,2.2]
>
> Toplansvinklen langs kanten *AT* beregnes således:
>
> $$\arccos\left(\frac{dotP(crossP(B-A,T-A),crossP(D-A,T-A))}{\|crossP(B-A,T-A)\| \cdot \|crossP(D-A,T-A)\|}\right)$$
>
> og resultatet bliver 117.9 grader.

Hvis vi skulle finde den tilsvarende vinkel i grundfladen, vinkel *BAD*, så ville formlen se således ud:

$$\cos(A_{\text{grundflade}}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AD}\right\|}$$

Formlen for toplansvinklen langs en kant fremkommer således populært sagt ved i formlen for den tilsvarende vinkel i grundfladen at "krydse" alle de indgående vektorer fra højre med kantvektoren $\overrightarrow{AT}$. ◊

Matematik