Om summer af trekanttal

Af Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium.

Torben Amtrup behandlede i LMFK-bladet nr. 1 et interessant problem med kuglepyramider. Her får man brug for at finde summen af de n første trekanttal. Trekanttallene er som bekendt

$$1\,,\,3\,,\,6\,,\,10\,,\,15\,,\,21\,,\,28\,,\,\ldots$$

hvor det n-te trekanttal t_n er givet ved formlen

$$t_n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Vi ønsker at finde en formel for summen

$$S_n = t_1 + t_2 + \ \ldots + t_n$$

Tallene S_n udgør talfølgen

$$1\ \ 4\ \ 10\ \ 20\ \ 35\ \ 56\ \ 84\ \ldots$$

Nu kan vi danne de såkaldte *differenstalfølger*, som er forskellene mellem nabotal, forskellene mellem disse forskelle osv:

S_n:	1	4	10	20	35	56	84	...
Δ_1:		3	6	10	15	21	28	...
Δ_2:			3	4	5	6	7	...
Δ_3:				1	1	1	1	...

Nu gælder, at hvis den n-te differens Δ_n for en talfølge er konstant, kan elementerne i selve talfølgen fremstilles ved et polynomium af (højst) n-te grad. Dette polynomium opnås lettest ved at foretage (i dette tilfælde) kubikregression på grafegneren med de første 4 punkter (1,1), (2,4), (3,10) og (4,20). Man får så, at

$$\begin{aligned} S_n &= \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{3}n \\ &= \tfrac{1}{6}n(n^2 + 3n + 2) \\ &= \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2). \end{aligned}$$

Hvis man synes, at denne sætning om differenser er noget langhåret (eller måske helt ukendt), kan man i stedet føre et bevis ved hjælp af en (snedig) figur som vist nederst på siden.

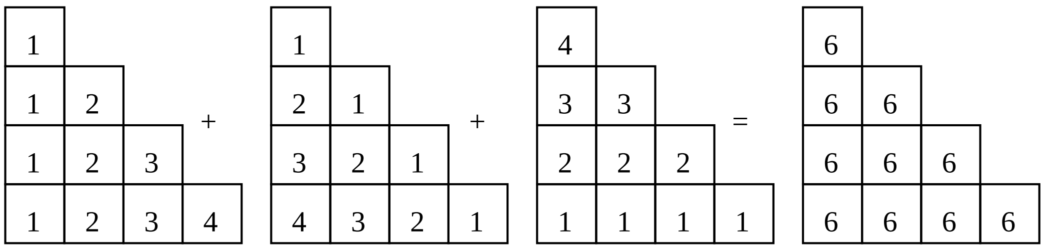
Hver af de tre trappefigurer til venstre udtrykker summen $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$, idet det er underforstået, at tallene i felterne skal lægges sammen vandret. Trappefiguren til højre indeholder i hvert felt summen af tallene i de tilsvarende felter i de tre trappefigurer til venstre. Altså får vi

$$3(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) =$$
$$6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$$

og generelt får vi åbenbart

$$3(t_1 + t_2 + \cdots + t_n) =$$
$$t_n \cdot (n+2) =$$
$$\tfrac{1}{2}n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

og heraf fremgår formlen. ◊



$t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ $\quad$ $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ $\quad$ $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ $\quad$ $3(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)$