Kuglepyramider – eksperiment 2

Af Hans Lütken, tidl. Ishøj Amtsgymnasium.

Torben Amtrups artikel i LMFK-bladet nr. 1, januar 2006, gav mig lyst til at eksperimentere lidt videre.

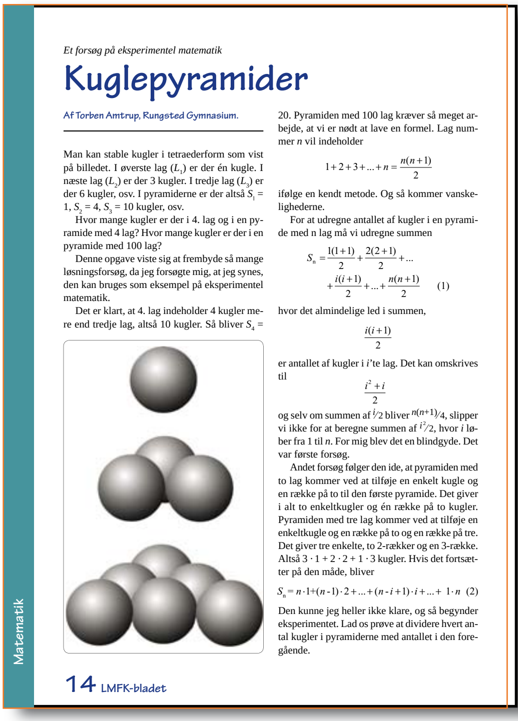
Antallet af kugler i lag nr. n er, som TA også skriver

$$L_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Da L_n er kvadratisk i n, kunne det være, at antallet af kugler i en pyramide ville være et 3.gradspolynomium i n, dvs. af formen

$$S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$$

De fire laveste værdier af n giver fire ligninger med de fire ubekendte koefficienter:



Et forsøg på eksperimentel matematik

Kuglepyramider

Af Torben Amtrup, Rungsted Gymnasium.

Man kan stable kugler i tetraederform som vist på billedet. I øverste lag (L_1) er der én kugle. I næste lag (L_2) er der 3 kugler. I tredje lag (L_3) er der 6 kugler, osv. I pyramiderne er der altså $S_1 = 1$, $S_2 = 4$, $S_3 = 10$ kugler, osv.

Hvor mange kugler er der i 4. lag og i en pyramide med 4 lag? Hvor mange kugler er der i en pyramide med 100 lag?

Denne opgave viste sig at frembyde så mange løsningsforsøg, da jeg forsøgte mig, at jeg synes, den kan bruges som eksempel på eksperimentel matematik.

Det er klart, at 4. lag indeholder 4 kugler mere end tredje lag, altså 10 kugler. Så bliver S_4 = 20. Pyramiden med 100 lag kræver så meget arbejde, at vi er nødt at lave en formel. Lag nummer n vil indeholder

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ifølge en kendt metode. Og så kommer vanskelighederne.

For at udregne antallet af kugler i en pyramide med n lag må vi udregne summen

$$S_n = \frac{1(1+1)}{2} + \frac{2(2+1)}{2} + \dots + \frac{i(i+1)}{2} + \dots + \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

hvor det almindelige led i summen,

$$\frac{i(i+1)}{2}$$

er antallet af kugler i i'te lag. Det kan omskrives til

$$\frac{i^2+i}{2}$$

og selv om summen af $i/2$ bliver $n(n+1)/4$, slipper vi ikke for at beregne summen af $i^2/2$, hvor i løber fra 1 til n. For mig blev det en blindgyde. Det var første forsøg.

Andet forsøg følger den ide, at pyramiden med to lag kommer ved at tilføje en enkelt kugle og en række på to til den første pyramide. Det giver i alt to enkeltkugler og én række på to kugler. Pyramiden med tre lag kommer ved at tilføje en enkeltkugle og en række på to og en række på tre. Det giver tre enkelte, to 2-rækker og en 3-række. Altså $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3$ kugler. Hvis det fortsætter på den måde, bliver

$$S_n = n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + \dots + (n-i+1) \cdot i + \dots + 1 \cdot n \qquad (2)$$

Den kunne jeg heller ikke klare, og så begynder eksperimentet. Lad os prøve at dividere hvert antal kugler i pyramiderne med antallet i den foregående.

Matematik

14 LMFK-bladet

Den artikel i LMFK-bladet, som der refereres til.

$$S_0 = d = 0$$
$$S_1 = a + b + c = 1$$
$$S_2 = 8a + 4b + 2c = 4$$
$$S_3 = 27a + 9b + 3c = 10$$

Værdierne a, b og c findes ved først at eliminere c og dernæst b:

$$S_3 - 3S_1 = 24a + 6b = 7$$
$$S_2 - 2S_1 = 6a + 2b = 2$$
$$(S_3 - 3S_1) - 3(S_2 - 2S) = 6a = 1$$

Heraf ses, at

$$a = \frac{1}{6},\ b = \frac{1}{2} \text{ og } c = \frac{1}{3},$$

dvs.

$$S_n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n = \frac{1}{6}n(n^2 + 3n + 2)$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

At dette virkelig er den rigtige formel for S_n, kan ses ved et induktionsbevis. Vi antager, at formlen er rigtig for en værdi, n, og skal nu vise, at den også gælder for n+1.

Da $S_{n+1} = S_n + L_{n+1}$ fås, at

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)n}{6} + \frac{(n+1)(n+2)3}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

Formlen gælder altså også for n +1, og da den gælder for fx n = 3, gælder den for alle n.

Når man er kommet så langt, kan man begynde at spekulere på, om det har nogen betydning, at $L_n = K_{n+1,2}$ og $S_n = K_{n+2,3}$. ◊

Matematik