Et forsøg på eksperimentel matematik

Kuglepyramider

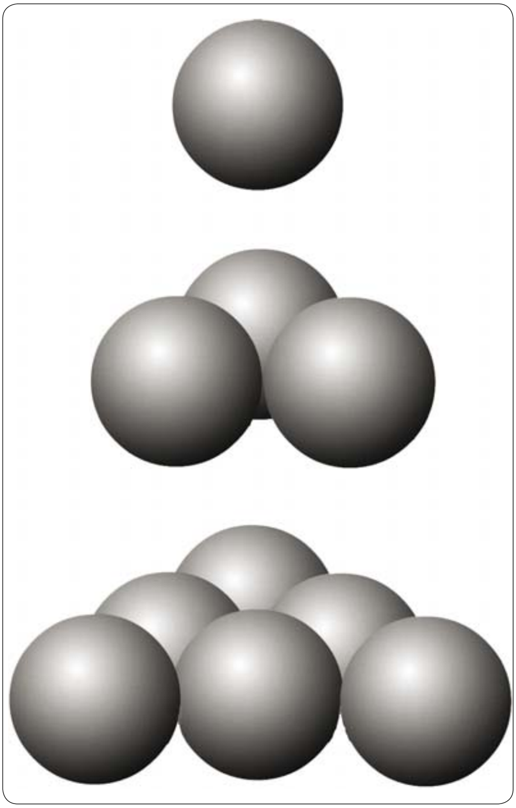
Af Torben Amtrup, Rungsted Gymnasium.

Man kan stable kugler i tetraederform som vist på billedet. I øverste lag (L_1) er der én kugle. I næste lag (L_2) er der 3 kugler. I tredje lag (L_3) er der 6 kugler, osv. I pyramiderne er der altså $S_1 = 1$, $S_2 = 4$, $S_3 = 10$ kugler, osv.

Hvor mange kugler er der i 4. lag og i en pyramide med 4 lag? Hvor mange kugler er der i en pyramide med 100 lag?

Denne opgave viste sig at frembyde så mange løsningsforsøg, da jeg forsøgte mig, at jeg synes, den kan bruges som eksempel på eksperimentel matematik.

Det er klart, at 4. lag indeholder 4 kugler mere end tredje lag, altså 10 kugler. Så bliver $S_4 =$



20. Pyramiden med 100 lag kræver så meget arbejde, at vi er nødt at lave en formel. Lag nummer *n* vil indeholder

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ifølge en kendt metode. Og så kommer vanskelighederne.

For at udregne antallet af kugler i en pyramide med n lag må vi udregne summen

$$S_n = \frac{1(1+1)}{2} + \frac{2(2+1)}{2} + \ldots + \frac{i(i+1)}{2} + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

hvor det almindelige led i summen,

$$\frac{i(i+1)}{2}$$

er antallet af kugler i *i*'te lag. Det kan omskrives til

$$\frac{i^2+i}{2}$$

og selv om summen af $i/2$ bliver $n(n+1)/4$, slipper vi ikke for at beregne summen af $i^2/2$, hvor *i* løber fra 1 til *n*. For mig blev det en blindgyde. Det var første forsøg.

Andet forsøg følger den ide, at pyramiden med to lag kommer ved at tilføje en enkelt kugle og en række på to til den første pyramide. Det giver i alt to enkeltkugler og én række på to kugler. Pyramiden med tre lag kommer ved at tilføje en enkeltkugle og en række på to og en række på tre. Det giver tre enkelte, to 2-rækker og en 3-række. Altså $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3$ kugler. Hvis det fortsætter på den måde, bliver

$$S_n = n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + \ldots + (n-i+1) \cdot i + \ldots + 1 \cdot n \quad (2)$$

Den kunne jeg heller ikke klare, og så begynder eksperimentet. Lad os prøve at dividere hvert antal kugler i pyramiderne med antallet i den foregående.

Når vi husker, at antallene er 1, 4, 10, 20, 35, 56, osv., får vi

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{4}{1},\ \frac{S_3}{S_2}=\frac{5}{2},\ \frac{S_4}{S_3}=\frac{6}{3},\ \frac{S_5}{S_4}=\frac{7}{4},\ \text{osv.}$$

Dvs.

$$\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{n+2}{n-1}$$

Da $S_1 = 1$, får vi S_n (hvis systemet fortsætter), ved at gange alle brøkerne sammen, hvilket giver det (for mig) overraskende resultat, at

Hovedsætning

$$S_n=\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}=K_{n+2,3} \qquad (3)$$

hvor $K_{n+2,3}$ jo er antallet af 3-delmængder af en n+2-mængde.

Kan det virkelig passe? Hvis vi kan vise, at det gælder for alle n, at

$$S_n - S_{n-1} = L_n$$

eller

$$K_{n+2,3} - K_{(n-1)+2,3}=\frac{n(n+1)}{2}$$

kan vi lave et induktionsbevis, der beviser resultatet. Man kan faktisk knokle sig igennem disse indledende beregninger på traditionel vis:

$$\begin{aligned}
S_n - S_{n-1} &= \frac{(n+2)!}{3!\cdot(n-1)!}-\frac{(n+1)!}{3!\cdot(n-2)!}\\
&= \frac{(n+2)!}{3!\cdot(n-1)!}-\frac{(n+2)!\cdot(n-1)}{3!\cdot(n-1)!\cdot(n+2)}\\
&= \frac{(n+2)!}{3!\cdot(n-1)!}\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+2}\right)\\
&= \frac{(n+2)!}{3!\cdot(n-1)!}\cdot\left(\frac{(n+2)-(n-1)}{n+2}\right)\\
&= \frac{(n+2)!}{3!\cdot(n-1)!}\cdot\frac{3}{n+2}\\
&= \frac{(n+1)!}{2\cdot(n-1)!}\\
&= \frac{n\cdot(n+1)}{2}\\
&= L_n
\end{aligned}$$

Da $S_1 = K_{3,3} = 1$ og $S_2 = K_{4,3} = 4$, kan resten køres som et normalt induktionsbevis. Antallet af kugler i en n-lags tresidet kuglepyramide er derfor lig med $K_{n+2,3}$.

Man kan undre sig over, hvad dette antal har at gøre med en kombination fra kombinatorikken; men resultatet giver i hvert fald anledning til et par følgesætninger:

Corollar 1

$$n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+\ldots+(n-i+1)\cdot i+\ldots+1\cdot n = K_{n+2,3}$$

Dette følger direkte af formlen (2) for S_n ovenfor.

Corollar 2

Summen af alle kvadrattal fra 1^2 til n^2 er lig med

$$\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

Beviset bygger på kommentarerne til formel (1) og føres på samme måde som beregningen i forbindelse med hovedsætningen. Det begynder således:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cdot(i+1)}{2} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{2}+\frac{n\cdot(n+1)}{4}\\
&= S_n
\end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 2\cdot S_n - \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Resultatet fås så efter en masse regneri (reduktion), som kan overlades til læseren.

Selve denne opgave kan måske ikke anvendes i gymnasiet (måske på A-niveau); men som eksempel kan den vel demonstrere, hvordan man kan anvende en eksperimentel metode i matematik, og som sådan er metoden en prototype på eksperimentel matematik.

Det er selvfølgelig meningen, at eleverne kun får opgaven (Hvor mange kugler er der i en pyramide med 100 lag?) og at de selv skal lave de fejlslagne forsøg og måske ledes til at lave det eksperiment, der fører til et resultat. ◊