Cæsars matematik

Af Jens Juhl Jensen, fhv. lektor i lingvistik ved KU.

Julius Cæsars navn sættes ofte i forbindelse med begrebet kryptografi. Således har han lagt navn til en substitutionskode der er så ligetil at enhver spejderdreng nutildags ville kunne dechifrere den på få minutter. Måske er det derfor ingen tilsyneladende nogensinde har undersøgt om der i Cæsars skrifter er indarbejdet mere intellektuelt anstrengende fænomener. Men det lader ikke desto mindre til at være tilfældet, og gennem afdækning af disse kan man erhverve sig et vist indblik i hans matematiske kundskaber.

Cæsars skrift *Gallerkrigen (de Bello Gallico, BG)* indeholder tællelige enheder på i hvert fald følgende tre niveauer: bøger (*libri*), kapitler og paragraffer (som regel = helmeninger, dvs. hovedsætninger med tilhørende bisætninger). I moderne videnskabelige udgaver er disse størrelser markeret med arabertal, hvad de naturligvis ikke kan have været i grundteksten.

Det er hensigten med nærværende artikel at påvise at antallene af tekstlige enheder er styret af et ønske om at etablere harmoniske mønstre på et aritmetisk grundlag, og at teksten derved kan afsløre enkeltheder om Cæsars kendskab til matematiske begreber.

Men først et moderne eksempel på noget lignende. Hvad har følgende to citater tilfælles? "En eller anden går tur i gaderne, for at lægge mærke til sig selv." "En eller anden er forsvundet for nogen som han ellers fulgtes med."

Flere ting. For det første stammer de begge fra Inger Christensens digtcyklus Det (1969: 22, 23). For det andet består de begge af 66 anslag (bogstaver, sætningstegn, mellemrum). For det tredje er der i begge en kommafejl, set i forhold til grammatisk tegnsætning, som er det system der ellers praktiseres i bogen. I det første citat skal der ikke være noget komma efter gaderne, for resten er ikke en selvstændig bisætning. I det andet citat burde der have været et komma foran som, idet dette ord indleder en relativsætning.

Hvis de to sætninger havde været skrevet "korrekt", ville den første have rummet 65 anslag, den anden 67. Og så var der kommet kludder i regnestykket, idet dette bygger på at hver linje indeholder 66 enheder og at hvert afsnit indgår i en gruppe på 66 linjer (fra 1.66 over 2.33 til 66.1). Tallet 66 er velegnet til den slags hokuspokus fordi det har så umanerligt mange divisorer. 67 derimod ville have været komplet uegnet, fordi det er et primtal, og meget bedre forholder det sig ikke med 65. Forfatteren er tydeligt nok bekendt med at 66 har primfaktorerne 2, 3 og 11 – hvad hun jo ikke er ene om.

Med andre ord: Inger Christensen bruger kommateringen som sikkerhedsventil i et elegant, men meget stramt system. Og det er jo helt legitimt, folk sætter alligevel kommaer som en brækket arm, så de færreste lægger mærke til den slags uregelmæssigheder. Men eksemplet kan belyse at kvantitative sprogsystemer næsten altid vil geråde i konflikt med rent sproglige fænomener. Og at den slags konflikter kan være afslørende for systemet.

I BG er de primære antal:

Bøger	7
Kapitler	348
Paragraffer	1933

Fig. 1. BG som helhed.

Kapitler forekommer i disse antal: 54 35 29 38 58 44 90. Rækken begynder og slutter med et tal af strukturen 18p (for p = 3 og 5) og indeholder to konsekutive tal af strukturen 2p (38 og 58). Kan det tænkes at Cæsar har været bekendt med begrebet primtal (p)? Historisk er der intet til hinder, for dette begreb kendtes allerede af de gamle grækere. Har han udnyttet begrebet i sin planlægning af tekstens komposition? Det kan man ikke afgøre på grundlag af så små og få tal.

Seks af de syv tal kan parvis etablere summer delelige med 16, som det fremgår af skemaet i figur 2.

54						90	144	$= 16 \cdot 9$	$= 16p^n$
	35	29					64	$= 16 \cdot 4$	$= 16p^n$
			38	58			96	$= 16 \cdot 6$	$= 2^n p$
					44			$= 2^2 \cdot 11$	$= 2^n p$
156				192			$= 12p^n$		

Fig. 2. Kapitler i BG.

Mellem de tre talpars summer er der altså kommensurabilitet. Også dette begreb var velkendt i græsk matematik. Ligeledes er der strukturel overensstemmelse mellem tallene 144 og 64 (kvadrattal) samt mellem 96 og 44. Samt mellem summerne af den første sekvens på fire antal (156) og den finale sekvens på tre antal (192). Disse overensstemmelser ville gå tabt dersom man øgede eller mindskede et af tallene med 1, ligesom i tilfældet *Det*.

+		=	
54	35	89	p
54	29	83	p
38	35	73	p
38	29	67	p

Fig. 3. Første sekvens af kapitelantal i BG.

Som det fremgår af Fig. 3 kan der på grundlag af de fire første antal etableres parvise primtalssummer. En lignende strukturel harmoni optræder i den finale sekvens, jf. Fig. 4.

	58	44	90		
44			134	$= 2 \cdot 67$	$= 2np$
90	148			$= 4 \cdot 37$	$= 2np$
58		102		$= 6 \cdot 37$	$= 2np$

Fig. 4. Finale sekvens af kapitelantal i BG ($n = 1, 2, 3$)·

Det generelle indtryk man får af kapitelmængderne i BG er at de ikke er helt tilfældige, dvs. udelukkende afhængige af litterære hensyn, men at der også er gjort forsøg på at etablere numeriske harmonier. Men tallene er få og små, derfor er det hensigtsmæssigt at inddrage et større materiale. Et sådant har man i bøgernes mængder af paragraffer. De er:

319 164 141 197 340 247 525

Som det fremgår af den følgende tabel kan antallene opfattes som arrangeret sådan at deres summer danner mangefold af primtallet 7, i et symmetrisk mønster omkring primtallet 197.

319		164	
141	197	340	
247		525	
707	p	1029	
$= 7 \cdot 101$		$= 3 \cdot 7^3$	$= 7^n p$

Fig. 5. Paragraffer i BG.

Men den samme talrække kan også analyseres på anden vis:

	319							
164			340			504	$= 12 \cdot 42$	$18 \cdot 28$
	141				525	666		$18 \cdot 37$
		197		247		444	$= 12 \cdot 37$	$18 \cdot 37$

Fig. 6. Paragraffer i BG.

Ligesom i Fig. 5 kan antallene af paragraffer i de syv bøger anskues som tre par plus ét oversky-

1-6	7	5	7	4	4	4			31			p		
7-12	5	4	4	5	6	7				31			p^n	
13-18	7	7	5	6	6	10			41			p		
19-24	5	6	4	5	3	4				27			p^n	
25-30	7	6	4	5	3	5			30					
31-36	16	5	5	4	4	7			41			p		
37-42	5	7	7	15	5	6					45			$3n$
43-48	9	13	3	4	6	7					42			$3n$
49-54	5	5	3	7	8	3			31			p		
	66			55		53	174	$= 6 \cdot 29 =$	174					
		58					58	$= 2 \cdot 29 =$		58				
			42		45		87	$= 3 \cdot 29 =$			87			
							319							

Fig. 7. Paragraffer i BG 1.

dende. I Fig. 6 er der kommensurabilitet mellem første og tredje par (begge = $12n$) og mellem første og andet par (begge = $18n$) samt mellem andet og tredje par (begge = $111n$).

kap.						Summer			
1-5	4	5	5	10	6	30			
6-10	4	3	5	5	5		22		
11-15	6	5	3	5	5	24			
16-20	4	5	3	8	4			24	
21-25	6	2	5	5	3	21			
26-30	5	5	3	5	4		22		
31-35	5	4	7	1	4	21			
	34	29	31	39	31	$3n$	22	$3n$	
	63			70		96	44	24	164
	$7n$			$7n$		$4n$	$4n$	$4n$	$4p$
			p			$24n$		$24n$	

Fig. 8. Paragraffer i BG 2.

I dette tilfælde er tallene tilstrækkeligt store til at man med høj grad af sikkerhed kan formode at den numeriske harmoni er bevidst etableret.
En nærmere undersøgelse af de enkelte bøgers antal paragraffer peger i samme retning, jf. eksempelvis tabellerne i figur 7 ff.

Det samlede antal (319) er et mangefold af primtallet 29 ligesom BG's samlede antal kapit-

kap.						
1-7, 8-14	44			44	88	
16-22, 23-29		32	48			80
30-36, 37-43		32	42			74
45-51, 52-58	42			38	80	
	86			82	168	154
	$= 2p$			$= 2p$	$= 14n$	$= 14n$

Fig. 9. BG 5. Kontinuerlige gruppers summer.

Kapitel												Sum		
1-11	4	3	6	6	7	4	9	8	8	5	5	65		5·13
12-22	9	11	6	2	5	5	3	5	3	5	4		58	
23-33	9	6	5	2	5	6	5	4	5	7	5		59	
34-44	9	10	4	10	4	4	8	4	3	6	3	65		5·13
			21		21		25	21	19	23		130		10·13
	31	30									17		78	6·13
	31	30		20		19					17		117	9·13
					21						17	38		2·19
	31			20			25					76		4·19
		30	21					21		23		95		5·19

Fig. 10. BG 6. Paragraffer og diskontinuerlige grupper (delsummer).

ler (348) er det. Både lodret og vandret falder antallene i tre grupper der ligeledes danner mangefold af 29. I kolonne 10 er summerne symmetrisk opbygget på grundlag af to konkrete primtal (31 og 41) omkring et lige tal som begge parsummer er kommensurable med ((31+41):30 = 12:5). I kolonne 11 optræder to tal der hvert kun har én primfaktor (31 og 27 = 3^3). I kolonne 12 forekommer to kommensurable tal (45 og 42). I hver af disse tre kolonner er der altså strukturel harmoni mellem elementerne.

Sjette bog rummer 247 paragraffer (= 13 · 19), og disse to primtal spiller da også en afgørende rolle for systemets opbygning, som det fremgår af skemaet i figur 10.

Særlig markant er det i kapitlets begyndelse, som det fremgår i figur 11.

De foregående overvejelser, som kun er en mindre del af en ret omfattende beskrivelse, peger klart i retning af at BG-teksten er et eksempel på litterær talkomposition i mindst samme grad som Det er det. Men hvem er "gerningsmanden"? Cæsar selv eller en senere redaktør?

Man kender adskillige tilfælde af at litterære tekster er blevet gjort til genstand for matematisk tilrettelæggelse. Den nutildags brugelige inddeling af bibelske tekster i kapitler og vers er et eksempel herpå. En redegørelse har jeg givet i tidsskriftet Matematik ((nr. 3, april 2005), hvor dog det sidste af skemaerne er blevet presset så meget at det er næsten ulæseligt (den korrekte version kan ses på min hjemmeside www.jjj-kbh.dk under Markus).

Cæsars skrift er imidlertid ikke et lignende tilfælde. Ved et filologisk pillearbejde kan man adskillige steder se at en akavet ordlyd skyldes hensyn til matematiske mønstre. Disse må altså være etableret af ordlydens ophavsmand, dvs. forfatteren selv.

Kapitel					Sum
1-3	4	3	6		13
4-5	6	7			13
6-7	4	9			13
8-11	8	8	5	5	26
12-14	9	11	6		*26*

Fig. 11. BG 6. Kontinuerlige sekvenser med summen 13·n.

BG er med andre ord en værdifuld kilde til indsigt i hvilket matematisk begrebsapparat Cæsar har rådet over. ♦