Om opbygningen af matematiske begreber

Af Randi Petersen, matematik og biologi, Bornholms Gymnasium.

Kernen i matematikfagligt svage elevers problem, er en usikker matematisk begrebsopbygning (Høines, 1987). Da matematikken har et hierarkisk islæt, giver svage matematikbegreber vidtrækkende konsekvenser for elevens videre muligheder for at forstå matematik. Eksempelvis er det ikke muligt at forstå en ligning, hvis man ikke forstår et lighedstegn.

Dette er baggrunden for vigtigheden af, som undervisere i matematik, at forstå de matematiske begrebers natur og den måde, hvorpå de skabes, kulturelt såvel som ved individuel videnstilegnelse.

Denne artikel om opbygningen af matematiske begreber, er skrevet på grundlag af en synopsis jeg skrev som del af mit pædagogikum ved Bornholms Gymnasium.

Jeg har tidligere undervist på lærerseminariet, hvor jeg fattede interesse for børns opbygning af matematiske begreber. Særlig anvendte jeg ovennævnte didaktiker; Marit Høines, som giver en frugtbar beskrivelse af etableringen af matematiske begreber, som dog desværre kun omfatter børn op til 6. klassetrin.

I en mere generel teoribygning har didaktikeren Anna Sfard beskrevet den matematiske begrebsopbygning som en trinvis udvikling, der sker både kulturelt og på en analog måde i den individuelle begrebsopbygning (Sfard, 1991). Undervisning i matematik bør tilrettelægges under hensyntagen til, at eleverne får mulighed for at arbejde med alle trin i begrebsopbygningen og at de bliver stimuleret rettidigt til at komme videre til næste trin. Sfards teori om opbygningen af et matematisk begreb er derfor af betydning for, hvordan gymnasiets undervisning i matematik ideelt set skal struktureres.

Matematiske begrebers natur

Matematiske begreber har en dual natur, da de kan opfattes dels som operationer og dels som statiske strukturer.

Eksempel på en operation; barnet tæller på fingrene, spørger man "hvor mange fingre har du på din hånd?", så tæller de igen og associerer ikke til det sidste tal de fandt ved den første optælling (Høines, 1987). Operationen kommer (som iagttaget af Piaget) i regelen først.

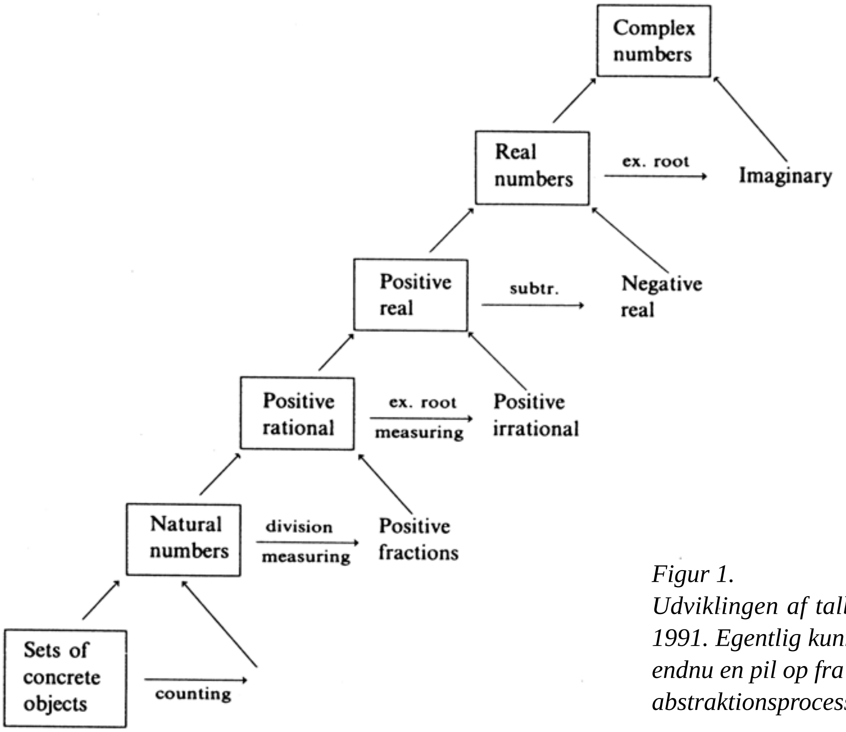
Ældre børn og voksne, har gennemført en abstraktion. Det naturlige tal er ikke kun længere lig tællehandlingen, men bliver eksisterende i sig selv og er dermed blevet en tingsliggjort statisk struktur. Sfards betegnelse for dette er, at tallet er blevet reifikeret. Ordet kommer af latin, hvor "res" betyder "ting" (Sfard, 1991). Figur 1 illustrerer en udvikling, hvor stadig flere tal er opfundet og indlemmet i den kulturhistoriske forståelse af hvad et tal er.

Et ontologisk skift

Et klassisk eksempel på en type tal, der har gennemgået udviklingen fra at blive betragtet som operation og til at få status som egentligt tal, er de irrationelle tal, ofte eksemplificeret med kvadratrod 2. De gamle grækere fandt denne længde på enhedskvadratets diagonal (udregningen er en operation), men ville ikke anerkende tallet som eksisterende på lige fod med de naturlige tal. De betegnede længden som en "størrelse", der netop adskilte sig fra et tal. De negative tal var tilsvarende ugleset i det middelalderlige Europa og blev betegnet absurde (Beck et al., 1998), men efter at have subtraheret og algebraisk manipuleret tal med et negativt fortegn, vænnede man sig til absurditeten. Der skete et ontologisk skift i opfattelsen af de negative tal, som bl.a. gav sig udtryk i, at tallinien også rummede dem; de blev kulturelt reifikerede.

Den abstraktion, som den kulturelle reifikation er udtryk for, skal også gennemføres på det psykologiske plan, når et individ skal tilegne sig et matematisk begreb. Sfard citerer Piaget som støtte for den analogi hun gennemfører fra det historiske til det psykologiske niveau:

"the [mathematical] abstraction is drawn not from the object that is acted upon, but from the action itself. It seems to me that this is the basis



Figur 1.
Udviklingen af talbegrebet. Fra Sfard, 1991. Egentlig kunne Sfard have tilføjet endnu en pil op fra de komplekse tal, da abstraktionsprocessen ikke er endelig.

of logical and mathematical abstraction" (Piaget, ifølge Sfard, 1991, Sfards parentes).

Den proces Sfard kan identificere i den kulturelle udvikling, kan således genfindes i den individuelle opbygning af matematiske begreber. Den identificerede udvikling har tre faser:

- introduktionsfasen, som er de operationer, der er del af ethvert matematisk begreb
- en navngivningsfase; operationer sker med objektet, hvor en navngivning er hensigtsmæssig, men det er endnu ikke anerkendt som et selvstændigt objekt.
- den strukturelle fase, hvor objektet får status som et egentligt objekt.

Analogt til de tre skitserede faser opstiller Sfard tre faser i den psykologiske opbygning af et matematisk begreb:

- interiorization, en handling sker med på forhånd kendte objekter
- kondensation, handlingerne fortættes til en ide om en selvstændig entitet
- reifikation, den nye entitet skifter ontologisk status og bliver et objekt, som kan manipuleres med i nye sammenhænge.

Det ontologiske skift sker i reglen kun i kraft af, at nye handlinger udføres, hvor den efterhånden velkendte entitet skal integreres i en sammenhæng. Der bliver således udført handlinger med begrebet, hvor en opfattelse af begrebet som et selvstændigt objekt gør disse handlinger lettere. Udviklingen af matematiske begreber, hvor reifikation af et begreb er afhængig af, at begrebet anvendes i operationer, som fører til interiorization af et nyt begreb og begrebernes deraf følgende hierarkiske struktur, er skematisk opstillet i figur 2.

Undervisning i matematik

Konsekvenserne for ovenstående teoretiske overvejelser om matematiske begrebers natur, har en konsekvens for hvordan undervisningen i matematik bør organiseres.

Sfard konkluderer, at undervisningen bør starte med proces frem for at introducere det statiske begreb først.

I min undervisning i 1g har jeg fulgt TRIP-systemet, som ofte både i øvelserne og i organiseringen af stoffet sætter operationer forud for strukturelle præsentationer af de forskellige matematiske begreber. Jeg vil eksemplificere med funktionsbegrebet. Dette introduceres relativt sent i grundbogen, hvor der forinden er arbejdet operationelt med to ligningstyper (rette linier og parabelkurver) og oversættelser mellem repræsentationsformerne, forskrift, tabel og graf. Desuden er betydningen af de faste tal i forskrifterne og centrale formler i tilknytning hertil, gennemgået. Dermed burde eleverne have været i interiorizationsfasen, da vi nåede til den egentlige introduktion af funktionsbegrebet. Jeg satte det de havde lært om ligninger ind i rammerne for funktionsbegrebet, dvs. introducerede forskellen på de to variable og fastlagde entydigheden fra den uafhængige til den afhængige variabel. Desuden tegnede jeg en funktionsmaskine.

Reifikation af funktionsbegrebet

Formålet var dels at tydeliggøre forskellen på ligninger og funktioner og dels at give dem en konkret model på funktioners abstrakte struktur. Målet var altså i høj grad at bringe dem i kondensationsfasen. Vi har videre arbejdet med skift mellem repræsentationsformer og introduceret nye funktioner, for at arbejde på en måde, der hører til kondensationsfasen. For at nå reifikationen af funktionsbegrebet, skal begrebet ifølge teorien (se figur 2) anvendes i en sammenhæng, hvor eleverne tvinges til at operere med begrebet som et objekt, hvilket er mentalt lettere, hvis begrebet skifter ontologisk status fra kun at være operation og til også at kunne opfattes som objekt. Denne sammenhæng kan for funktioners vedkommende være differentiation.

Når en funktion differentieres tvinges eleverne til at opfatte funktionen som et objekt, thi hvis de ikke når den erkendelse forstår de ikke hvad det vil sige at differentiere. For at lette denne erkendelse, planlægger jeg igen at gennemføre en analogi: Hvis funktionerne er en maskinpark, skal differentialoperatoren opfattes som en maskine, som kan gå ind og virke på maskinerne (de kan eksempelvis reparere dem).

Det er, som ved analogien med funktionsmaskinen et fattigt operatorbegreb, hvis eleverne ikke siden hen sætter sig ud over analogien, men som et billede på både operatorer og funktioner som struktur, mener jeg analogien er befordrende for at hjælpe reifikationen af funktioner.

Hidtil har jeg endvidere givet en enkelt blækregningsopgave, som kunne initiere reifikationsfasen hos de bedste. Det drejer sig om opgave 4.016:

Bestem den eksakte værdi af hver af løsningerne til $(\log(x))^2 + 3\cdot\log(x) - 4 = 0$

Her skal logaritmefunktionen betragtes som et objekt for at kunne løse opgaven. Der var en del i klassen som kunne løse opgaven, men en ukendt del af disse har sikkert fået hjælp fra andre. Udfra denne opgave er min vurdering, at det endnu kun er et fåtal i klassen som har reifikeret funktionsbegrebet. Denne vurdering bakkes op af en analyse jeg har gennemført som del af synopsen: 1g-klassen lavede begrebskort over funktionsbegrebet, og analysen dækker dels en generel vurdering af deres forståelse af funktionsbegrebet og dels en nærmere analyse af udvalgte begrebskort.

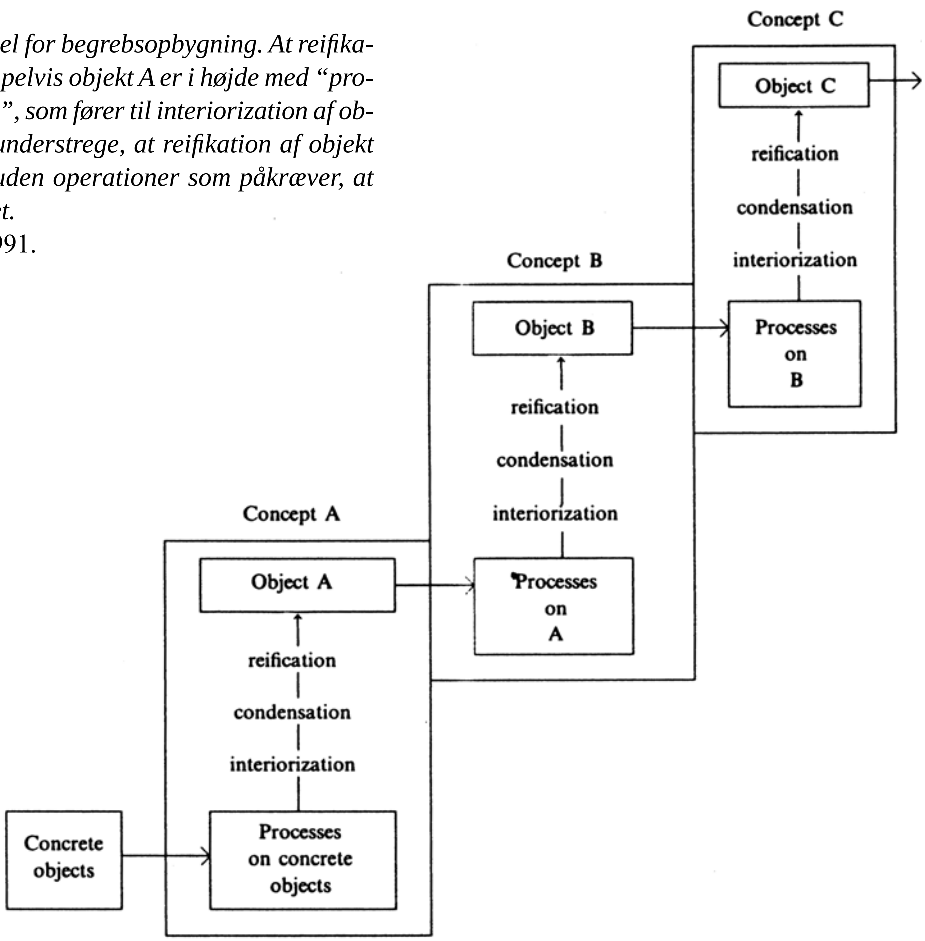
En generel tendens er, at jo bedre forståelse eleven har, des flere informationer indeholder begrebskortet. Endnu et gennemgående fællestræk ved begrebskortene er, at de stort set kun nævner polynomier, som eksempler på funktioner. Dette er i overensstemmelse med, at Sfard nævner, at elever ofte forestiller sig en ret linie, når de skal forestille sig en funktion. En grund kan dog være at den eneste funktion vi har brugt længere tid på, som ikke er et polynomium, er logaritmefunktionen, som bogen ikke benævner *f(x)*.

Konklusion

Den beskrevne teori om matematiske begrebers mentale dannelsesproces er et redskab både til planlægning af undervisningen i matematik og til at kunne analysere, hvor og hvorfor eleverne går i stå, når de har hjælp behov.

Planlægningen skal ifølge teorien tage hensyn til, at eleverne først skal arbejde med begrebet som en proces og derefter skal gives udfordringer, som stimulerer eller ligefrem fremtvinger en kvalitativ ny opfattelse af begrebet, nemlig reifikationen. Da klassen stadig er midt i processen

Figur 2.
Generel model for begrebsopbygning. At reifikation af eksempelvis objekt A er i højde med "processer med A", som fører til interiorization af objekt B, skal understrege, at reifikation af objekt A ikke sker uden operationer som påkræver, at A er reifikeret.
Fra Sfard, 1991.



med at opbygge funktionsbegrebet, har jeg ikke kunnet gennemføre en kvantitativ undersøgelse af deres opbygning af funktionsbegrebet. Min undersøgelse via begrebskortet viser i et midtvejsbillede, at mange elever er nået langt i kondensationsfasen og at nogle muligvis endda har reifikeret begrebet. Desværre var der også enkelte, som tydeligvis ikke var nået videre end interiorizationsfasen. De elever det drejer sig om er i forvejen nogle, som jeg har indtryk af, har en svag begrebsopbygning, når det gælder de begreber, de med rimelighed skulle have i rygsækken fra folkeskolen. Det stemmer igen overens med teorien, som implicit beskriver matematikken som en hierarkisk struktur, hvor nye begreber bygges ovenpå de eksisterende.

Teorien hjælper endeligt læreren med at sikre sig elevernes forståelse for matematikkens duale natur, som de eksempelvis kan aflæse direkte af grafregnerens to minustaster – et operationstegn og et fortegnstegn – hvilket i sig selv er et mål for undervisningen.

Litteraturliste

Beck, Hans Jørgen, Hansen, H.C., Jørgensen, Anna og Petersen, Leif Ørsted: *Matematik i læreruddannelsen. Kultur, kundskab og kompetence*, Bind 1, Gyldendal Uddannelse, 1998.

Høines, Marit Johnsen: *Begynneropplæringen*, 1. udgave, 1987.

Sfard, Anna: *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics 22: 1 – 36, 1991. ♦