Kunsten at fornøje sig med kvadratiske udtryk

Af Helge Bennedsen, *helge_bennedsen@mail.dk.*

Hvor tit har vi ikke skrevet følgende udtryk op på tavlen – og kan det gøres tit nok?

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \qquad (1)$$

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \qquad (2)$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 \qquad (3)$$

Nu vil jeg fornøje mig, og forhåbentlig nogle læsere med nogle eksempler. Vi har en normal trekant *ABC*, hvor $a = |BC|$, $b = |CA|$ og $c = |AB|$. Ifølge cosinusrelationen gælder der at

$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

som vi nu omskriver:

$$\cos(A) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2+2bc-a^2-2bc}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} - 1$$

hvilket kan omskrives til:

$$1+\cos(A) = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} \qquad (4)$$

Ifølge cosinusrelationen gælder der, at

$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

som vi nu omskriver:

$$\cos(A) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2-2bc-a^2+2bc}{2bc} = \frac{(b-c)^2-a^2}{2bc} + 1$$

Hvilket kan omskrives til:

$$1-\cos(A) = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(c+a-b)(a+b-c)}{2bc} \qquad (5)$$

Da der er mere end én, der ved, at

$$\sin^2(A) = 1-\cos^2(A) = (1+\cos(A))(1-\cos(A))$$

fås ved at bruge (4) og (5), at:

$$\sin^2(A) = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{4b^2c^2}$$

Og så er det en smal sag at finde nedenstående udgave af Herons formel for trekant *ABC*s areal:

$$\frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin(A) = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$