Kunsten at beregne længden af siderne i en trekant (II)

Af Helge Bennedsen, *helge_bennedsen@mail.dk.*

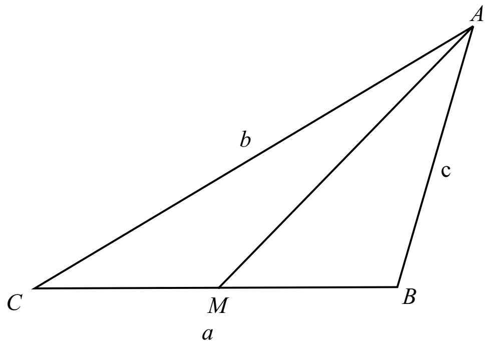
Denne artikel drejer sig om kunsten at beregne længderne af siderne i en trekant, hvor man kun kender medianernes længder.

Idet medianen fra vinkel *A* til siden *a* har længden m_a, får man ved at anvende cosinusrelationen på vinkel *C* i trekanterne *CAM* og *CAB*, og dernæst bruge hovedet i et kort øjeblik, at

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \qquad (1)$$

$$m_b^2 = \frac{c^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4} \qquad (2)$$

$$m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \qquad (3)$$



En metode til at finde sidelængderne *a*, *b* og *c* går ud på, at man først kigger på trekant $A_1B_1C_1$, hvis sidelængder er følgende:

$$c_1 = |A_1B_1| = m_c,$$
$$a_1 = |B_1C_1| = m_a$$
$$b_1 = |C_1A_1| = m_b.$$

Og så beregner man længden af medianerne i trekant $A_1B_1C_1$:

$$m_{a_1}^2 = \frac{b_1^2+c_1^2}{2} - \frac{a_1^2}{4} = \frac{m_b^2+m_c^2}{2} - \frac{m_a^2}{4}$$

og ved at anvende (1) , (2) og (3) får vi:

$$m_{a_1}^2 = \frac{\frac{c^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}{2} - \frac{\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}{4}$$

$$= \left(\frac{3}{4}a\right)^2 \qquad (4)$$

og med fornøden omtanke fås:

$$m_{b_1}^2 = \left(\frac{3}{4}b\right)^2 \quad \text{og} \quad m_{c_1}^2 = \left(\frac{3}{4}c\right)^2$$

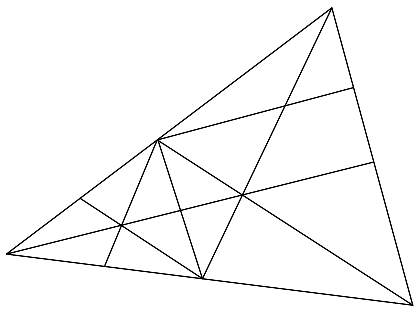
Nu skal vi opsummere erfaringerne fra det hidtidige forløb:

Hvis man har en trekant med sidelængderne *a*, *b* og *c* og medianlængderne m_a, m_b og m_c vil en trekant med sidelængderne m_a, m_b og m_c have medianlængderne

$$\frac{3}{4}a, \quad \frac{3}{4}b \quad \text{og} \quad \frac{3}{4}c$$

Opgave: Beregn sidelængderne for den trekant, hvis tre medianer har længderne 6, 7 og 8.

Nu kommer der en interessant tegning:



Hvis du kigger nærmere på ovenstående trekant, vil du måske indse, at artiklens hovedkonklusion kan nås på en alternativ måde.

Kunsten at beregne længden af siderne i en trekant (III)

Af Helge Bennedsen, *helge_bennedsen@mail.dk.*

Denne artikel drejer sig om kunsten at beregne længderne af siderne i en trekant, hvor man til at begynde med kun kender længderne af vinkelhalveringslinierne.

Det her er rå numerisk matematik. Jeg starter med at skrive nogle formler op for kvadraterne på længden af vinkelhalveringslinierne:

$$v_a{}^2 = b \cdot c \cdot \left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right)$$

$$v_b{}^2 = c \cdot a \cdot \left(1 - \left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right)$$

$$v_c{}^2 = a \cdot b \cdot \left(1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right)$$

hvor a, b og c er længderne af trekantens sider.

Lad os forestille os, at vi har en trekant, hvor vinkelhalveringslinierne har længderne 6, 7 og 8. Jeg har anvendt matematikprogrammet *Mathcad*, der er velegnet til løsning af vanskelige ligninger. For at forstå de næste fem linier skal man have kendskab til Mathcads specielle syntaks.

$$g(x,y,z) = y \cdot z \cdot \left[1 - \frac{x^2}{(y+z)^2}\right]$$

$x := 1 \quad y := 2 \quad z := 1.5$

Given $g(x,y,z)=36$ $g(y,z,x)=49$ $g(z,x,y)=64$

$u := \mathrm{Find}(x,y,z)$

$$u = \begin{pmatrix} 9.314 \\ 8.191 \\ 7.027 \end{pmatrix}$$

Trekanten med vinkelhalveringslinielængderne

$v_a = 6$, $v_b = 7$ og $v_c = 8$

har altså sidelængderne:

$a = 9{,}314$, $b = 8{,}191$ og $c = 7{,}027$.

Matematik