

“Matematikken i Rom” 20.-25. september 2004

Af Inger Holgaard, Peter Leineweber og Geert Skinner-Larsen Horsens Amtsgymnasium.

I forbindelse med et yderst veltilrettelagt og vellykket matematikkursus er vi blevet bedt om at komme med nogle ideer/oplæg til tværfagligt samarbejde mellem matematik og andre fag, der kan bruges i forbindelse med almen studieforberedelse i den nye gymnasiereform.

I høringsudgaven af læreplan for almen studieforbereelse står:

“Almen studieforbereelse består af emner, hvis belysning kræver flere fag og faglige hovedområder, og som samtidig er med til at kaste lys over fundamentale idémæssige og videnskabelige spørgsmål. Stoffet rummer problemstillinger fra nutid og fortid og omfatter konkrete værker, personer, begivenheder, eksperimenter, genstande o.l. knyttet til de pågældende problemstillinger.”

På ovennævnte Romkursus blev der fokuseret på følgende 3 hovedemner “Teknologi og bygningskunst fra Antikken over Barokken til moderne tid”, “Billedkunst fra Antikken til Barokken” og “Tidsregning fra Antikken til 1800-tallet”. Med dette udgangspunkt har vi her valgt kort at beskrive følgende tre underemner: “Kupler og Ovaler”, “Perspektivtegning og Anamorfoser” og “Solure og meridianlinier”. Her er gode muligheder for et samarbejde mellem matematik og et eller flere af fagene historie, religion, oldtidskundskab, billedkunst, astronomi og fysik.

Kupler og ovaler

Kupler

Da stort set alle kirker i Rom afsluttes opad med en kuppel, vil det næsten overalt i Rom være muligt at se en kuppel, hvor man end står. Ved første øjekast ser alle kupler mere eller mindre ens ud, men det er de ved nærmere eftersyn ikke.

Kuplerne kan betragtes med mange forskellige faglige briller: arkitektoniske, ingeniørmæssige, historiske, religiøse eller matematiske.

Set fra matematikerens synspunkt er nogle af kuplerne ekstra interessante, idet de er konstruerede ud fra stykker af cirkelbuen. Kuplerne er (med enkelte undtagelser) dog ikke egentlige halvkugler, da de spidser til for oven. Det har ofte været nødvendigt i konstruktionen af hensyn til de voldsomme kræfter, der påvirker kuplerne.

Peterskirkenes kuppel (1506-93, arkitekter bl.a. Donato Bramante, Antonio da Sangallo og Michelangelo Buonaratti) er en dobbeltkuppel, hvor den yderste skal er en såkaldt $2/3$ -dels kuppel. Det vil sige at radius i den cirkelbue, der er blevet brugt til at danne kuplen, udgør $2/3$ af buens spændvidde, største indvendige diameter. Den inderste kuppel derimod er en $3/5$ -dels kuppel, og den bliver derfor mere afrundet at se på indefra.

Af andre interessante kirkekupler kan nævnes:

- Santa Maria del Popolo, 1472-80, ukendt arkitekt, otte-kantet kuppel.
- Il Gesù, 1568-1584, arkitekter: Jacopo Barozzi da Vignola og Giacomo della Porta, $1/4$ -dels bue.
- San Carlo alla Quattro Fontane, 1638-41, arkitekt: Francesco Borromini, og Sant' Andrea al Quirinale, 1658-70, arkitekt: Gian Lorenzo Bernini, en oval kuppel.
- Sant' Ivo alla Sapienza, 1642-60, arkitekt: Francesco Borromini, meget specielt indre af kuplen sammensat af konkave og konvekse dele, konstruktioner vha. ligesidede trekanter og ydre/indre cirkler.

Allerede i antikken byggede man kupler, og den mest berømte af dem, der står i dag, er uden tvivl Pantheon. Den har fået lov at stå i næsten 1900 år i sin nuværende form, bl.a. fordi den i en meget lang årrække har været brugt som en kristen kirke. Pantheon er opbygget omkring en kugle, hvor den nederste halvdel er omskrevet af en cylinder. Det betyder, at kuplen her er en ægte halvkugle.

Lidt ældre, men også af noget mindre omfang, er kuplen over det otte-kantede rum i Domus Aurea, bygget som en del af kejser Neros palads i perioden mellem år 64 og 68 e.kr.



Af andre interessante kuppelkonstruktioner fra oldtiden kan nævnes Tempio de Romolo (ca. 300 e.kr), som passende kan beses ved et besøg på det kendte romerske torv, Forum Romanum.

De kræfter, der påvirker kuplerne er et studie i sig selv, og vil bedst kunne beskrives i et samarbejde med fysik. Der er såvel vandrette (tangentialkræfter) som lodrette kræfter (meridiankræfter), der skal styres, og for at få muligheder for at regne på disse kræfter bør emnet lægges sent i gymnasieforløbet, da der indgår en del integralregning.

Ovaler

Ovaler er et begreb, som normalt ikke får den store opmærksomhed i matematikundervisningen, måske fordi der i modsætning til cirkler og ellipser ikke kan knyttes en fælles ligning til alle ovaler.

Men i forbindelse med dynamiske tegneredskaber som f.eks. GeoMeter, kan ovaler komme til at spille en større rolle fremover. Det er nemlig muligt at konstruere ovaler på forskellige måder, og nogle af disse konstruktioner har med stor sandsynlighed været anvendt ved udformningen af nogle af kirkerne i Rom, mest tydeligt i San Carlo alla Quattro Fontane.

Michelangelo har også “leget” med de ovale former, og det er hans udkast, der ligger til grund for brolægningen på Piazza Campidoglio, som dog først blev udført i sidste århundrede.

Også en del af pladsen foran Peterskirken, arkitekt Gianlorenzo Bernini, er en oval, så konstruktionen af denne vil også være oplagt at inddrage i samme omgang.

Konstruktionen af ovaler kan fint indgå allerede i matematikundervisningen i gymnasiets første år.

Perspektivtegning og anamorfoser

Perspektiver

Fra og med Renæssancen forsøgte malerne sig med naturtro og realistiske fremstillinger af den tredimensionale verden på en todimensional flade. I de følgende århundreder udvikledes gradvis det teoretiske og praktiske grundlag for perspektivlæren, dvs. læren om, hvordan man afbilder rumlige ting på en plan flade.

To af renæssansens største kunstnere er Michelangelo og Raffael, hvis værker bl. a. kan ses i Vatikanmuseet, som huser mange flotte eksempler på perspektivtegninger. Her ses f.eks. Raffaels “Skolen i Athen” og Michelangelos udsmyk-

ning af “Det Sixtinske Kapel”. Et andet eksempel ses i Villa Farnesia, hvor man kan opleve en Perspektivsal på 1. sal med illusionistiske fliser malet på væggene. Her kan man så forsøge at finde det sted i rummet, hvor perspektivet er nogenlunde korrekt på alle vægge samtidigt.

Anamorfoser

Kunstnernes teoretiske og praktiske indsigt i perspektivlæren nåede et sådant niveau, at man ikke blot fremstillede perspektivisk korrekte billeder i stor stil, men også fremstillede billeder i hvilke, der gemmer sig et motiv. Dette motiv kan man kun se, hvis man betragter billedet fra et bestemt punkt, eller i andre tilfælde kun hvis man spejler billedet i et cylindrisk spejl. Sådanne billeder kaldes under et anamorfoser. Blandt anamorfoserne er der en type, som ofte kaldes *trompe l’oeil*, synsbedrag, der ligesom et perspektivisk billede bygger på en centralprojektion.

Eksempler på anamorfoser

- I Palazzo Spada kan man ud over illusionistiske vægmalerier se et eksempel på en tredimensional *trompe l’oeil*, nemlig en kolonnade konstrueret omkring 1653 af den kendte



arkitekt Francesco Borromini. Søjlegangen er omkring 8,5 m lang, men set på afstand, øjepunktet ligger i paladsets bibliotek, synes den vældig lang.

- I San Ignazio kirken har arkitekten og maleren Andrea Pozzo i stedet for at bygge en kuppel malet en. Øjepunktet for denne falske kuppel befinder sig tæt ved indgangen markeret i gulvet med en plade. Loftudsmykningen, som også er udført af samme kunstner, er et prægtigt illusionistisk maleri.
- I Santa Maria del Popolo kirken er der et kapel med Caravaggio-billeder med anamorfotiske træk af “Peters korsfæstelse” og “Paulus’ omvendelse”. Her anvendes en speciel brug af lyst og mørkt til understregelse af personernes vigtighed.
- Til sidst skal nævnes en anamorfose af Emanuel Maignan i Santa Trinitá dei Monti, der forestiller Minimerordenens stifter, Den hellige Frans af Paola.

Perspektivlæren kunne f.eks. behandles matematisk ved hjælp af geometrien ved at tage udgangspunkt i en model, der indeholder begreber som centralprojektion med øjepunkt, forsvindingspunkter/hoved- forsvindingspunkt, horisont og distancepunkter herunder distancepunktkonstruktion. Den matematiske behandling/dybde af geometrien bag perspektivet, plan- og rumgeometri, afhænger selvfølgelig af emnets tidsmæssige placering i almen studieforberedelse.

En ikke-matematisk behandling af emnet kunne f.eks. behandle spørgsmålet om, hvorfor man i Renæssancen begyndte at lægge stor vægt på naturtro billeder.

Tidsregning – solure og meridianlinier

Solure

Princippet bag et solur er enkelt. En “pind”, en såkaldt gnomon, anbringes vinkelret på et “vandet” underlag, og gnomonens skygge registrerer i løbet af dagen solens bevægelser og dermed såvel årstid som tidspunkt på dagen.

Princippet med at lade ofte store gnomoner, typisk obelisker, angive årstid og tid på dagen ved spidsen af deres skygges position på visse linier aftegnet på en stor plads er kendt fra antikken.



Gnomonens skygge vil ved middag være kortest og pege mod nord. Hvis man dag for dag registrerer middagsskyggens længde, observerer man, at skyggen er længst ved vintersolhverv og kortest ved sommersolhverv. Ved dagligt at afmærke middagsskyggens endepunkt, vil der dannes en række punkter på en ret linie med retningen nord-syd. Denne linie kaldes en meridianlinie, og den registrerer således årets gang.

Meridianlinjen i Santa Maria degli Angeli

Den nævnte meridianlinje blev konstrueret af F. Bianchini i 1702. Kirkens største højtid, påsken blev på et møde i 325 i Nikæa fastlagt, så påskedag skulle være den første søndag efter den første fuldmåne efter forårsjævndøgn, og samtidig bestemte man, at forårsjævndøgn skulle være den 21. marts. Den dengang anvendte Julianske kalender havde 12 måneder og 365 dage på et år med skudår hvert fjerde år. Problemet med denne kalender var imidlertid, at jævndøgn forskydedes med et døgn pr. 100 år.

I 1500-tallet var problemet blevet så stort, at forårsjævndøgn var blevet forskudt 10 dage fra den 21. marts til den 11. marts, og pave Gregorio XII får i 1582 indført en ny kalender, den gregorianske kalender, som korrigerer for fejlen.

Dette er bl.a. baggrunden for, at der i 1702 i Santa Maria degli Angeli blev konstrueret en meridianlinje – ikke ved hjælp af en gnomon, men

med et hul i taget, som sollyset kunne trænge igennem. Linien er markeret med en metalskinne i gulvet, og langs linien er bl.a. afsat forskellige talskalaer. Herunder en tangensskala.

I Santa Maria degli Angeli ses endvidere nordstjernens daglige bevægelser omkring himlens nordpol som ellipseprojektioner.

Refleksionssolure i Palazzo Spada og i Trinità dei Monti-klostret

Begge konstrueret af Emanuel Maignan i perioden 1636-1659. Princippet i refleksionssoluret består i, via et spejl, at lede solens lysstråle ind som en plet på loftet af et cylinderhvelv i et rummeligt galleri. På loftet er aftegnet forskellige linier, herunder forskellige time- og daglinier. Loftet fungerer således ved aflæsning af solpletens placering som urskive/kalender.

Matematiks bidrag til behandling af emnet, afhængig af dets placering i almen studieforberedelse, kunne f.eks. være talsystemer (romertal), trekantsberegning (tangensskala) og keglesnit. Det vil være naturligt også her at inddrage fysik.

Tak til kursuslederen

Stor tak til kursusledelsen bestående af Marianne Kesselhahn, Ivan Tafteberg, Claus Jensen og Preben Nørregaard, der utrættelige og med stort engagement samt spændende og inspirerende foredrag, gav os en stor oplevelse.