

Vej- og rutsjebanegeometri

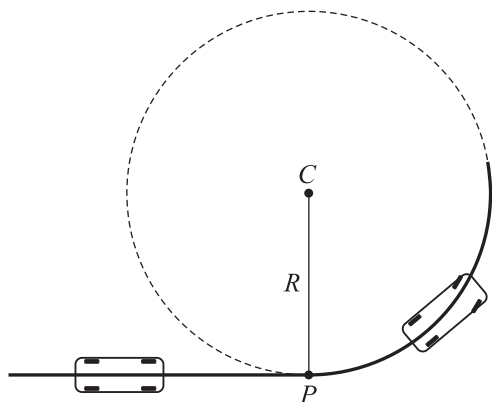
Af Erik Vestergaard, Haderslev Katedralskole.
www.matematiksider.dk.

Vejgeometri

I begyndelsen af foråret 2004 faldt jeg tilfældigvis over en gammel gulnet avisartikel, som var stukket ind i en gammel matematikbog. Der var tale om artiklen [1] fra *Ingeniørens Ugeblad* fra 1962 med titlen *Smukkere og bedre veje ved hjælp af klotoider*. Jeg havde aldrig hørt om, at man ved projekteringen af veje gjorde brug af særlige matematisk definerede kurver, så det var med stor interesse, jeg læste artiklen.

Senere kontaktede jeg folk på DTU og blev ad omveje henvist til lærebogen [2] med titlen *Stier og veje*, som bliver anvendt af studerende i vejbygning på DTU. Som såkaldte *hovedelementer* for en vej anvendes *det rette linjestykke* samt *cirkelen* af indlysende årsager: I begge tilfælde skal rattet ikke drejes for at bilen følger kurven!

Hvis man lader et lige stykke vej forløbe tangentielt over i en cirkel med radius R , som vist på figur 1, så skal rattet i bilen drejes momentant, hvilket er et problem! Denne diskontinuitet afspejler sig matematisk ved, at man går fra en kurve med krumning 0 til en kurve med krumning $1/R$. Nu har en vej jo en bredde, så der er alligevel lidt rum til, at man kan køre en bil igennem sammenhængningspunktet P , men ubehaget vil være større



Figur 1.

jo mindre radius i cirkelbuen er. Derfor har man fundet på at indskyde en såkaldt *overgangskurve*. Ved at vælge en del af en *klotoide* som overgangskurve kan man opnå, at man skal dreje rattet med *konstant vinkelhastighed* for at komme rundt i kurven, under den forudsætning, at bilen kører med konstant fart! Matematisk kan det udtrykkes ved, at krumningen ændrer sig lineært fra 0 til $1/R$. Det vil jeg argumentere for om lidt.

Klotoiden kaldes også undertiden for en *Cornu spiral*, opkaldt efter den franske fysiker *Marie Alfred Cornu* (1841 – 1902), som anvendte kurven til at beskrive fænomener indenfor optikken. Kurven har parameterfremstillingen:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} A \cdot \int_0^t \cos\left(\frac{1}{2}z^2\right) dz \\ 0 \\ A \cdot \int_0^t \sin\left(\frac{1}{2}z^2\right) dz \end{pmatrix}$$

Heraf fås straks følgende udtryk for hastighedsvektoren og accelerationsvektoren:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} A \cdot \cos\left(\frac{1}{2}t^2\right) \\ 0 \\ A \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t^2\right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = \begin{pmatrix} -A \cdot t \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t^2\right) \\ 0 \\ A \cdot t \cdot \cos\left(\frac{1}{2}t^2\right) \end{pmatrix}$$

Via en velkendt formel for krumningen af en regulær parametriseret kurve fås følgende udtryk for krumningen κ i det til t svarende kurvepunkt:

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} A \cdot \cos\left(\frac{1}{2}t^2\right) & A \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t^2\right) \\ -A \cdot t \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t^2\right) & A \cdot t \cdot \cos\left(\frac{1}{2}t^2\right) \end{vmatrix}}{A^3} = \frac{t}{A}$$

Det ses nemt af udtrykket for hastigheden ovenfor, at *farten* er konstant lig med A . Hvis man foretager et parameterskift $t = (v_0/A) \cdot t_1$, og nu lader t_1 repræsentere tiden, vil det svare til, at kurven gennemløbes med den faste fart v_0 . Krumningen i det til parameteren t_1 svarende punkt bliver da ifølge ovenstående udtryk for krumningen: $(v_0/A^2) \cdot t_1$.

På figur 2 går et ret linjestykke over i en del af en klotoid, som igen forløber over i krumningscirklen til klotoiden i et punkt P . I praksis benyttes kun en ganske lille del af klotoiden. Af tegnetekniske årsager har jeg anvendt en urealistisk stor del af klotoiden! Antag nu, at hele kurven tilbagelægges med den faste fart v_0 . Da har vi følgende udtryk for krumningsradius ρ i det til tiden t_1 svarende punkt på klotoiden:

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{(v_0/A^2) \cdot t_1} = \frac{A^2}{v_0 \cdot t_1}$$

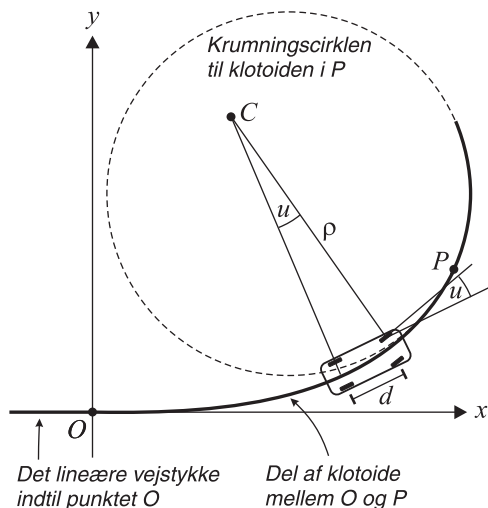
Betragt figur 2 igen: Bilen befinder sig til tidspunktet t_1 et sted på klotoidedel, hvor krumningscirklen har radius ρ og centrum i C . Den vinkel, som for- og baghjul spænder over, set fra C , betegner vi u . En overvejelse giver, at så må bilens forhjul være drejet vinklen u i forhold til baghjulene. Hvis akselafstanden betegnes d , har vi med stor tilnærmelse: $\rho \cdot u = d$, når u regnes i radianer! Ved at kombinere de to sidste formler får vi:

$$u = \frac{d}{\rho} = \left(\frac{d \cdot v_0}{A^2} \right) \cdot t_1$$

som viser, at den vinkel som bilens forhjul danner med bilens baghjul er proportional med tiden, altså at vinkelhastigheden er konstant! Dette vil i almindelighed betyde, at også rattet skal drejes med konstant vinkelhastighed! Dermed er det ønskede vist.

Rutsjebanegeometri

Ved at søge på nettet efter klotoider opdagede jeg, at klotoiden også ofte bliver benyttet i rutsjebaner med loops. Tyskeren *Anton Schwarzkopf* har været en af de dominerende aktører indenfor udstyr til forlystelsesparker og i 1970'erne løste hans chefingeniør *Werner Stengel* et problem ved konstruk-



Figur 2

tion af et loop: At give loopet en geometrisk udformning, så G -påvirkningerne ved gennemløb af loopet bliver tålelige. Hans løsning var at anvende klotoiden som en del af kurven.

Et loop er stort set plant, så vi tillader os at beskrive bevægelsen med en vektorfunktion i to dimensioner. Accelerationsvektoren kan opdeles i en *tangentiel*- og en *normal-komponent* og man kan vise, at størrelsen af normal-komponenten er $a_n = v^2/\rho$, hvor v er farten og ρ er *krumningsradius*. G -påvirkningen er den acceleration, som passageren føler sædet udsætter ham/hende for. Størrelsen af denne kan vi kalde a_{reaktion} .

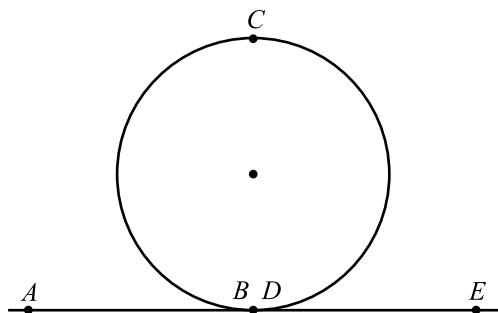
Lad os vende tilbage til loopets geometriske form. Den oplagte mulighed er selvfølgelig at lave et cirkulært loop, som vist på figur 3. En lille overvejelse viser, at i punktet B vil man have

$$a_{\text{reaktion}} = a_n + g = v^2/\rho + g$$

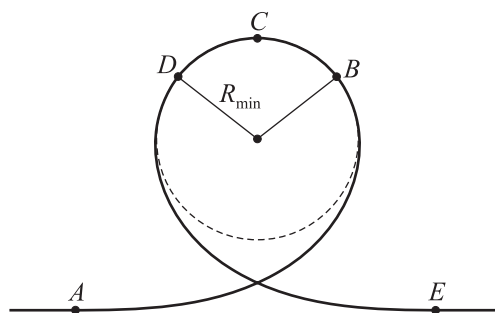
hvor g er tyngdeaccelerationen, mens man i punktet C vil have

$$a_{\text{reaktion}} = a_n - g = v^2/\rho - g$$

Når vognen kører igennem loopet får den ingen motorkraft, den skal udelukkende komme igennem loopet via sin kinetiske energi. Som vi kan se af udtrykkene for G -påvirkningens størrelse betyder det, at G -påvirkningen er særlig stor i bunden af loopet! I praktiske tilfælde op til $10G$,



Figur 3



Figur 4

hvilket er så stor en påvirkning, at den ofte vil medføre personskade. Werner Stengel indså, at hvis man øger krumningsradius i bunden, så vil man få mindsket G -påvirkningen her. Han konstruerede så et loop á lá den på figur 4, hvor et ret linjestykke går over i en del af en klottoide, som til sidst går over i dens krumningscirkel et stykke højere oppe af kurven! I praksis fik han reduceret G -påvirkningen til knap $5G$, hvilket er acceptabelt.

På billedet nedenfor kan du se et dobbelt-klottoide-loop fra rutsjebanen *Shockwave* i forlystelsesparken *Six Flags over Texas*, Arlington, Texas. Den er bygget af Anton Schwarzkopf og taget i brug i 1978. Billedet er vist med tilladelse fra Joel A. Rogers, www.coastergallery.com.

Du kan læse meget mere om emnet i denne artikel på min hjemmeside [3]. Her kan også downloades en note, som måske kan anvendes til det valgfrie forløb i det 3. årige forløb til højniveau. Noten er på ca. 40 sider, hvoraf en pæn del er opgaver!

Litteratur/web

- [1] Niels Bræstrup-Nielsen. *Smukkere og bedre veje ved hjælp af klottoider*. Ingeniørens Ugeblad, artikel nr. 25, 23. juni 1962.
- [2] Bent Thagesen (redaktør). *Vej og stier*. Polyteknisk forlag, 1. udgave, 2. oplag, 2000.
- [3] www.matematiksider.dk/vejgeometri.html. Min hjemmeside med emnet vejgeometri.

