Løsning af den logistiske ligning på en anden måde

Af Gudbrandur Armannsson, brandur@email.dk.

At løse den logistiske ligning

$$y' = a(M-y)y$$

har altid givet mine elever problemer. Gennem årene har jeg skiftet mellem tre metoder:

1) vi har differentieret

$$f(x) = \frac{M}{1+c\cdot e^{-aMx}}$$

og indsat f og f' i ligningen.

2) vi har løst ligningen ved separation af de variable, anvendt partielle brøker og til sidst integreret vha. substitution.

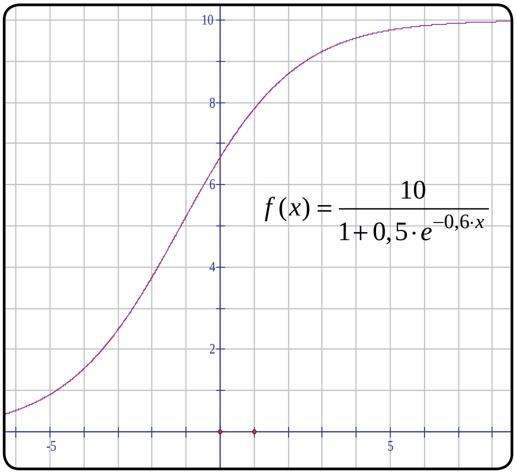
3) vi har indført en hjælpefunktion

$$g(x) = \frac{M}{f(x)} - 1$$

og eftervist, at denne er en løsning til en lineær differentialligning af første orden. Denne ligning løses, og f bestemmes nu let.

For ikke så længe siden fandt jeg på en variant af den sidste metode, som jeg selv er glad for, se rammen nedenfor.

Jeg vil slutte med at fortælle, hvordan vi laver et overslag over den logistiske kurve gennem et sæt observationer.



Vi indlæser punkterne i L_1 og L_2 på TI-83 og tegner vha. STAT PLOT.

Ved hjælp af TRACE skønner vi først M og derpå "medianen" m (ved $M/2$) og "første kvartil" k (ved $M/4$). Så sætter vi

$$aM = \frac{\ln(3)}{m-k}$$

og

$$c = e^{aMm}$$

og dermed har vi forskriften.

Jeg indrømmer, at denne sidste metode falder ind under det, man kalder høkerregning, men den giver pæne grafer.

Idet $a > 0$ og $0 < y < M$	$y' = a(M-y)y$
Sæt $uy = M$, så er $u > 1$ og ved differentiation fås	$u'y + uy' = 0$
Indsæt her $a(M-y)y$ for y'	$u'y + u\,a(M-y)y = 0$
Divider med y	$u' + au(M-y) = 0$
Gang ind i parentesen med u	$u' + a(uM - uy) = 0$
Her er $uy = M$	$u' + a(Mu - M) = 0$
M tages udenfor parentesen	$u' + aM(u-1) = 0$
	$u' = -aM(u-1)$
Dette er en lineær differentialligning af første orden med løsningen	$u = 1 + ce^{-aMx}$
hvor $c > 0$, idet $u > 1$, og dermed er	$y = \dfrac{M}{u} = \dfrac{M}{1+ce^{-aMx}}$