En sjov måde at finde polynomiers tangenter på

Af Helge Bennedsen, hlb@post12.tele.dk

Den kvikke gymnasieelev Lasse skal finde ligningen for tangenten i punktet $(1, f(1))$. Og lad os antage, at $f(x) = x^3+x^2–2x–1$.

Naturligvis gør Lasse det således, at han først dividerer $f(x)$ med $(x–1)^2 = x^2–2x+1$.

$$\begin{array}{r|l}
x^2 - 2x + 1 & x^3 + x^2 - 2x - 1 \;\lfloor\, x + 3 \\
 & x^3 - 2x^2 + x \\
 & \quad 3x^2 - 3x - 1 \\
 & \quad 3x^2 - 6x + 3 \\
 & \qquad\quad 3x - 4
\end{array}$$

Og så konkluderer Lasse, at tangenten i punktet $(1, f(1))$ har ligningen $y = 3x–4$.

Lektor Hansen, som har passeret de 60 og muligvis har levet fagligt på rutinen de sidste 25 år, sidder og censurerer Lasses skriftlige besvarelse af studentereksamensættet, hvori de netop beskrevne udregninger har fundet sted.

Guderne må vide, hvad Lektor Hansen når frem til, da der især er 99,99999 % sandsynlighed for, at han ikke på noget tidspunkt har lært sine elever den metode.

Beviset for Lasses smarte metode

Vi dividerer polynomiet $f(x)$ med $(x–u)^2$ og får resultatet $Q(x)$ rest $(ax+b)$.

Der må så i følge divisionprøvereglen gælde at:

1) $f(x) = Q(x) \cdot (x–u)^2 + (ax+b)$

Vi differentierer nu på hver side mht. x og får:

2) $f'(x) = Q'(x) \cdot (x-u)^2 + Q(x) \cdot 2(x-u) + a$

Og hvis vi indsætter $x = u$, får vi at:

3) $f'(u) = a$

Og hvis vi indsætter $x = u$ i 1), får vi at:

4) $f(u) = au+b \quad b = f(u) – au$

Hvis vi i ligningen $y = ax + b$ indsætter $a = f'(u)$ og $b = f(u) – au$ får vi følgende:

5) $y = f'(u) \cdot x + f(u) – au$

$y = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$

hvilket er ligningen for tangenten i punktet $(u, f(u))$.

Hvis vi meget apropos følger vejen videre ud af tangenten og dividerer polynomiet $f(x)$ med det tilfældige andengradspolynomium $p(x)$, får vi naturligvis resultatet $Q(x)$ rest $(ax+b)$.

Lad os for sjov skyld analysere os frem til en fortolkning af det resultat.

Fortolkning

Ved divisionsprøven får vi at

6) $f(x) = Q(x) \cdot p(x) + (ax+b)$

Lad os nu antage at $p(x)$ har de to forskellige rødder r_1 og r_2, dvs. at $p(r_1) = p(r_2) = 0$.

Vi indsætter nu først $x = r_1$ og dernæst $x = r_2$ og får følgende to resultater:

7) $f(r_1) = ar_1+b$ og $f(r_2) = ar_2+b$

og ved simpel subtraktion fås følgende:

8) $f(r_2)–f(r_1) = (ar_2+b) – (ar_1+b)$

$f(r_2) – f(r_1) = a(r_2 – r_1)$

Vi ser nu umiddelbart, at linien med ligningen $y = ax+b$ blot er den rette linie, der indeholder punkterne $(r_1, f(r_1))$ og $(r_2, f(r_2))$, såfremt rødderne r_1 og r_2 er reelle tal. Vi er stiltiende gået ud fra, at $f(x)$ og $p(x)$ er polynomier med reelle koefficienter og reelle rødder.

I det samme sæt, som Lasse forlyster sig med i en salig rus af eksamensfeber, skal Lasse finde det andengradspolynomium, der har fællestangent med et tredjegradspolynomium $f(x)$ i punktet $(2, f(2)$, og har et fællespunkt i $(–1, f(–1))$.

Så vidt jeg husker har tredjegradspolynomiet forskriften $f(x) = x^3+2x^2– 3x –1$.

Den ivrige Lasse dividerer $f(x)$ med $(x–2)^2(x+1) = x^3– 3x^2+4$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 + 4 & x^3 + 2x^2 - 3x - 1 \;\lfloor\, 1 \\
 & x^3 - 3x^2 \qquad\quad + 4 \\
 & \qquad 5x^2 - 3x - 5
\end{array}$$

Og så finder Lasse ud af, at andengradspolynomiet med de ønskede egenskaber har ligningen

$$y = 5x^2 – 3x –5$$

Lektor Hansen griber telefonen og snakker både med fagkonsulenten og den anden skriftlige censor om, hvad man dog skal stille op med Lasse.